УДК 539.3

УТОЧНЕННАЯ УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ СФЕРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК С УЧЕТОМ ДЕФОРМАЦИИ СДВИГА

Абдусатторов А.,
д.т.н., профессор
Юлдашев Т.,
д.т.н., вед. науч. сотруд.
Расулмухамедов М.М.,
к.ф.м.н., доцент (ТашИИТ)

Аннотация. На основе вариационного принципа Гамильтона – Остроградского и теории тонкостенных оболочек [1,2].разработаны модели нелинейного деформирования тонкостенных подкрепленных оболочечных конструкций типа цистерны, состоящих из цилиндрических и сферических оболочек. Выведена система дифференциальных уравнений равновесия (движения) для цилиндрических и сферических оболочечных конструкций с соответствующими граничными и начальными условиями. При этом предполагалось, что деформация оболочки происходит без деформации сдвига ($e_{\alpha\gamma}=0, e_{\beta\gamma}=0$) в плоскости нормальных сечений [3,4]. В данной работе приведена система канонических уравнений в векторной форме для сферических оболочечных конструкций с учетом деформации сдвига и условия стыковки с цилиндрической оболочкой.

Постановка задачи. Деформации сдвига $e_{\alpha\gamma}$, $e_{\beta\gamma}$ в общем случае определяется по формулам

$$\left.\begin{aligned} e_{\alpha\gamma} &= H_1\frac{\partial}{\partial\gamma}\left(\frac{1}{H_1}u_\alpha\right)+\frac{1}{H_1}\frac{\partial u_\gamma}{\partial\alpha} \\ e_{\beta\gamma} &= H_2\frac{\partial}{\partial\gamma}\left(\frac{1}{H_2}u_\beta\right)+\frac{1}{H_2}\frac{\partial u_\gamma}{\partial\beta} \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

где $H_1 = A(1+k_1\gamma)$, $H_2 = B(1+k_2\gamma)$.

Используем геометрические соотношения, связывающие компоненты деформации и углы поворота с перемещениями серединной поверхности сферической оболочки [5]. Компоненты перемещения сферических оболочек принимает вид

$$u_\alpha=\left(1+\frac{\gamma}{R}\right)u-\frac{\gamma}{R}\frac{\partial w}{\partial\alpha};\ u_\beta=\left(1+\frac{\gamma}{R}\right)v-\frac{\gamma}{R\sin\alpha}\frac{\partial w}{\partial\beta};\ u_\gamma=w. \tag{2}$$

В последних формулах введем следующие обозначения:

$$\theta_1=\frac{1}{R}\left(u-\frac{\partial w}{\partial\alpha}\right);\ \theta_2=\frac{1}{R}\left(v-\frac{1}{\sin\alpha}\frac{\partial w}{\partial\beta}\right) \tag{3}$$

Учитывая геометрические гипотезы, перемещения u_i представим в виде

$$u_\alpha=u+\gamma\theta_1;\ u_\beta=v+\gamma\theta_2;\ u_\gamma=w(\alpha,\beta) \tag{4}$$

На основе соотношения (4), представим компоненты деформации в следующем виде:

$$e_{\beta\gamma}=\left(1-\frac{\gamma}{R}\right)\frac{1}{Rsin\alpha}\frac{\partial w}{\partial\beta}-\left(1+\frac{\gamma}{R}\right)\frac{v}{R}+\left(1-\frac{\gamma}{R}-\frac{2\gamma^2}{R}\right)\theta_2;$$

$$e_{\gamma\alpha}=\left(1-\frac{\gamma}{R}\right)\frac{1}{R}\frac{\partial w}{\partial\alpha}-\left(1+\frac{\gamma}{R}\right)\frac{u}{R}+\left(1-\frac{\gamma}{R}-\frac{2\gamma^2}{R}\right)\theta_1 \qquad (5)$$

Для получения уравнения движения сферических оболочечных конструкций воспользуемся уравнением Гамильтона – Остроградского [2]:

$$\int_t(\delta T-\delta\Pi+\delta A)dt=0 \qquad (6)$$

При определении вариации кинетической, потенциальной энергии и работы внешних сил используются следующие соотношения:

$$\delta\Pi=\int_V\left(\sigma_{\alpha\alpha}\delta e_{\alpha\alpha}+\sigma_{\beta\beta}\delta e_{\beta\beta}+\sigma_{\alpha\beta}\delta e_{\alpha\beta}+\sigma_{\beta\gamma}\delta e_{\beta\gamma}+\sigma_{\gamma\alpha}\delta e_{\gamma\alpha}\right)dV \qquad (7)$$

$$\delta A=\int_V\left(P_1\delta u_\alpha+P_2\delta u_\beta+P_3\delta u_\gamma\right)dV+\int_S\left(q_1\delta u_\alpha+q_2\delta u_\beta+q_3\delta u_\gamma\right)dS+$$
$$+\int_{S_1}\left(f_1\delta u_\alpha+f_2\delta u_\beta+f_3\delta u_\gamma\right)dS_1\Big|_{\alpha_1}+\int_{S_2}\left(\phi_1\delta u_\alpha+\phi_2\delta u_\beta+\phi_3\delta u_\gamma\right)dS_2\Big|_{\alpha_2} \qquad (8)$$

$$\delta\int_t Tdt=\int_t\int_v\left[\rho\frac{\partial u_\alpha}{\partial t}\delta\frac{\partial u_\alpha}{\partial t}+\rho\frac{\partial u_\beta}{\partial t}\delta\frac{\partial u_\beta}{\partial t}+\rho\frac{\partial u_\gamma}{\partial t}\delta\frac{\partial u_\gamma}{\partial t}\right]dVdt$$

Аналогичном образом [3], формируя соотношения (7)-(9), затем подставляя на вариационный принцип Гамильтона- Остроградского (6), получим:

$$\int_t\left(\delta T-\delta\Pi+\delta A\right)dt=$$
$$\int_t\int_\beta\int_\alpha\{[-\rho h\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\frac{\partial N_{\alpha\alpha}}{R\partial\alpha}-\frac{1}{R^2}\frac{\partial M_{\alpha\alpha}}{\partial\alpha}+\frac{1}{Rsin\alpha}\frac{\partial N_{\alpha\beta}}{\partial\beta}-$$
$$-\frac{ctg\alpha}{R}(M_{\beta\beta}-\frac{1}{R}M_{\beta\beta}\left(\gamma^2\right)-\frac{1}{R^2}M_{\beta\beta}\left(\gamma^3\right))-$$
$$-N_{\gamma\alpha}+\frac{1}{R}M_{\gamma\alpha}-\frac{2}{R^2}M_{\gamma\alpha}\left(\gamma^2\right)+M_{\alpha\alpha}\left(P_1\right)+M_{\alpha\alpha}\left(q_1\right)]\delta\theta_1+$$
$$+\int_\beta\int_\alpha\{\rho h\frac{\partial u}{\partial t}\delta u+\rho h\frac{\partial v}{\partial t}\delta v+\rho h\frac{\partial w}{\partial t}\delta w+$$
$$+\rho\frac{h^3}{12}\frac{\partial\theta_1}{\partial t}\delta\theta_1+\rho\frac{h^3}{12}\frac{\partial\theta_2}{\partial t}\delta\theta_2\}R^2sin\alpha d\alpha d\beta/_t=0 \qquad (9)$$

Представим уравнение (9) в векторной форме:

$$\begin{aligned}
&\iiint_{t\,\beta\,\alpha}\{[-M\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}+\beta^{(1)}\frac{\partial Y}{R\partial\alpha}+\beta^{(2)}\frac{\partial Y_1}{R\partial\beta}+\beta^{(3)}\frac{\partial Y_2}{Rsin\alpha\partial\alpha}+\\
&\quad+\beta^{(4)}\frac{\partial Y_3}{Rsin\alpha\partial\beta}+\beta^{(5)}Y+\beta^{(6)}Y_1+\beta^{(7)}Y_2+\\
&+\beta^{(8)}Y_3+\beta^{(9)}Y_4+P]\delta U\}R^2 sin\alpha d\alpha d\beta dt+\\
&+\iint_{t\,\beta}\left[-\beta^{(1)}Y-\beta^{(3)}Y_2+\Phi\right]\delta URsin\alpha d\beta dt\,\Big|_{\alpha}+\\
&\quad+\iint_{t\,\alpha}\left[-\beta^{(2)}Y_1-\beta^{(4)}Y_3+F\right]\delta URd\alpha dt\,\Big|_{\beta}+\\
&\quad\iint_{\beta\,\alpha}\left[M\frac{\partial U}{\partial t}\delta U\right]R^2 sin\alpha d\alpha d\beta\,\Big|_{t}=0
\end{aligned}\tag{10}$$

Здесь

$$U=\begin{pmatrix}u\\v\\w\\\theta_1\\\theta_2\end{pmatrix};Y=\begin{pmatrix}N_{\alpha\alpha}\\N_{\alpha\beta}\\N_{\gamma\alpha}\\M_{\alpha\alpha}\\M_{\alpha\beta}\end{pmatrix};Y_1=\begin{pmatrix}N_{\alpha\beta}\\N_{\beta\beta}\\N_{\beta\gamma}\\M_{\alpha\beta}\\M_{\beta\beta}\end{pmatrix};Y_2=\begin{pmatrix}N_{\alpha\alpha}\\M_{\beta\gamma}\\M_{\gamma\alpha}\\M_{\alpha\alpha}\left(\gamma^2\right)\\M_{\alpha\beta}\end{pmatrix};$$

$$\Phi=\begin{pmatrix}N(\varphi_1)\\N(\varphi_2)\\N(\varphi_3)\\M(\varphi_1)\\M(\varphi_2)\end{pmatrix};F=\begin{pmatrix}N(f_1)\\N(f_2)\\N(f_3)\\M(f_1)\\M(f_2)\end{pmatrix};$$

где коэффициенты M, $\beta^{(i)}$ – матрицы пятого порядка.

$$\beta^{(1)}=\begin{pmatrix}\beta_{11}^{(1)}&0&0&\beta_{14}^{(1)}&0\\0&\beta_{22}^{(1)}&0&0&0\\0&0&\beta_{33}^{(1)}&0&0\\0&0&0&\beta_{44}^{(1)}&0\\0&0&0&0&\beta_{55}^{(1)}\end{pmatrix};\beta^{(2)}=\begin{pmatrix}\beta_{11}^{(2)}&0&0&0&0\\0&\beta_{22}^{(2)}&0&0&\beta_{25}^{(2)}\\0&0&\beta_{33}^{(2)}&0&0\\0&0&0&\beta_{44}^{(2)}&0\\0&0&0&0&\beta_{55}^{(2)}\end{pmatrix}$$

$$\beta^{(3)}=\begin{pmatrix}0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&\beta_{33}^{(3)}&0&0\\0&0&0&\beta_{44}^{(3)}&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix};\beta^{(4)}=\begin{pmatrix}0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&\beta_{33}^{(4)}&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&\beta_{55}^{(4)}\end{pmatrix}$$

$$\beta^{(5)}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \beta_{13}^{(5)} & 0 & 0 \\ 0 & \beta_{22}^{(5)} & 0 & 0 & 0 \\ \beta_{31}^{(5)} & 0 & 0 & \beta_{34}^{(5)} & 0 \\ 0 & 0 & \beta_{43}^{(5)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \beta_{55}^{(5)} \end{pmatrix};\ \beta^{(6)}=\begin{pmatrix} 0 & \beta_{12}^{(6)} & 0 & 0 & \beta_{15}^{(6)} \\ \beta_{21}^{(6)} & 0 & \beta_{23}^{(6)} & 0 & 0 \\ 0 & \beta_{32}^{(6)} & 0 & 0 & \beta_{35}^{(6)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \beta_{45}^{(6)} \\ 0 & 0 & \beta_{53}^{(6)} & \beta_{54}^{(6)} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\beta^{(7)}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \beta_{13}^{(7)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta_{43}^{(7)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};\ \beta^{(8)}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \beta_{15}^{(8)} \\ 0 & 0 & \beta_{23}^{(8)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta_{53}^{(8)} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\beta^{(9)}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta_{43}^{(9)} & \beta_{44}^{(9)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \beta_{55}^{(9)} \end{pmatrix};\ M=\begin{pmatrix} m_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_{33} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m_{55} \end{pmatrix}$$

Элементы матриц получаем из вариационного уравнения (9)

$$m_{11}=m_{22}=m_{33}=\rho h, m_{44}=m_{55}=\frac{\rho h^3}{12},$$

$$\beta_{11}^{(1)}=\beta_{22}^{(1)}=\beta_{33}^{(1)}=\beta_{44}^{(1)}=\beta_{55}^{(1)}=1, \beta_{14}^{(1)}=-\frac{1}{R};$$

$$\beta_{11}^{(2)}=\beta_{22}^{(2)}=\beta_{33}^{(2)}=\beta_{33}^{(2)}=\beta_{55}^{(2)}=1, \beta_{25}^{(2)}=-\frac{1}{R}\lim_{x\to\infty};$$

$$\beta_{33}^{(3)}=\beta_{44}^{(3)}=-\frac{1}{R};\quad \beta_{33}^{(4)}=\beta_{55}^{(4)}=-\frac{1}{R};$$

$$\beta_{13}^{(5)}=1, \beta_{22}^{(5)}=\beta_{55}^{(5)}=-\frac{ctg\alpha}{R}, \beta_{31}^{(5)}=-\frac{1}{R}, \beta_{34}^{(5)}=\frac{1}{R^2}, \beta_{43}^{(5)}=-1$$

$$\beta_{12}^{(6)}=\beta_{45}^{(6)}=-\frac{ctg\alpha}{R}, \beta_{54}^{(6)}=\frac{ctg\alpha}{R}, \beta_{23}^{(6)}=\frac{1}{R}, \beta_{32}^{(6)}=-1, \beta_{35}^{(6)}=\frac{1}{R^2}$$

$$\beta_{13}^{(7)}=\beta_{43}^{(7)}=\frac{1}{R}, \beta_{15}^{(8)}=\frac{ctg\alpha}{R^3}, \beta_{23}^{(8)}=\frac{1}{R^2}, \beta_{53}^{(8)}=\frac{1}{R},$$

$$\beta_{43}^{(9)}=-\frac{1}{R^2}, \beta_{44}^{(9)}=\beta_{55}^{(9)}=\frac{1}{R},$$

Для связи напряжений и деформаций примем закона Гука:

$$\sigma_{\alpha\alpha}=\frac{Eh}{(1-\nu^2)}\left(e_{\alpha\alpha}+\nu e_{\beta\beta}\right);\sigma_{\beta\beta}=\frac{Eh}{(1-\nu^2)}\left(e_{\beta\beta}+\nu e_{\alpha\alpha}\right);$$

$$\sigma_{\alpha\beta} = \mu e_{\alpha\beta;} \sigma_{\beta\gamma} = \mu e_{\beta\gamma}; \sigma_{\gamma\alpha} = \mu e_{\gamma\alpha}; \tag{11}$$

Согласно (11), вычисляем выражения внутренних усилий и моментов, по формулам:

$$N_{\alpha\alpha} = \int_{\gamma} \sigma_{\alpha\alpha} d\gamma; M_{\alpha\alpha} = \int_{\gamma} \gamma\sigma_{\alpha\alpha} d\gamma; N_{\alpha\beta} = \int_{\gamma} \sigma_{\alpha\beta} d\gamma; M_{\gamma\alpha} = \int_{\gamma} \gamma\sigma_{\gamma\alpha} d\gamma.$$

$$M_{\gamma\alpha}\left(\gamma^2\right) = \int_{\gamma} \gamma^2\sigma_{\gamma\alpha} d\gamma; M_{\beta\beta}\left(\gamma^2\right) = \int_{\gamma} \gamma^2\sigma_{\beta\beta} d\gamma\, M_{\beta\beta}\left(\gamma^3\right) = \int_{\gamma} \gamma^3\sigma_{\beta\beta} d\gamma.$$

В результате имеем:

$$N_{\alpha\alpha} = \frac{Eh}{\left(1-\nu^2\right)}\left[\frac{1}{R}\frac{\partial u}{\partial\alpha} + \frac{h^2}{12R}\frac{\partial\theta_1}{\partial\alpha} + \frac{\nu}{Rsin\alpha}\frac{\partial v}{\partial\beta} - \frac{\nu h^2}{12R}\frac{1}{Rsin\alpha}\frac{\partial\theta_2}{\partial\beta}\right] +$$

$$\nu\frac{ctg\alpha}{R}u - \frac{\nu h^2}{12R}\frac{ctg\alpha}{R}\theta_1 + \frac{(1+\nu)}{R}w$$

$$M_{\alpha\alpha} = \frac{Eh^3}{12\left(1-\nu^2\right)}\left[-\frac{1}{R^2}\frac{\partial u}{\partial\alpha} + \frac{1}{R}\frac{\partial\theta_1}{\partial\alpha} - \frac{\nu}{R^2 sin\alpha}\frac{\partial v}{\partial\beta} + \frac{\nu}{Rsin\alpha}\frac{\partial\theta_2}{\partial\beta}\right] +$$

$$\frac{Eh^3}{12\left(1-\nu^2\right)}\left[-\frac{\nu ctg\alpha}{R^2}u + \nu\frac{ctg\alpha}{R}\theta_1 - (1+\nu)\frac{w}{R^2}\right]$$

$$N_{\alpha\beta} = \mu h\left[\frac{1}{R}\frac{\partial v}{\partial\alpha} + \frac{1}{Rsin\alpha}\frac{\partial u}{\partial\beta} - \frac{ctg\alpha}{R}v\right]$$

$$M_{\alpha\beta} = \frac{\mu h^3}{12}\left[\frac{1}{R}\frac{\partial\theta_2}{\partial\alpha} + \frac{1}{Rsin\alpha}\frac{\partial\theta_1}{\partial\beta} - \frac{ctg\alpha}{R}\theta_2\right]$$

$$N_{\alpha\gamma} = \mu h\left[\frac{1}{R}\frac{\partial w}{\partial\alpha} - \frac{u}{R} + \theta_1\right]$$

$$M_{\alpha\gamma} = \frac{\mu h^3}{12R}\left[-\frac{1}{R}\frac{\partial w}{\partial\alpha} - \frac{u}{R} - \theta_1\right]$$

$$N_{\beta\beta} = \frac{Eh}{\left(1-\nu^2\right)}\left\{\left[\frac{1}{R}\frac{\partial u}{\partial\alpha} + + \frac{\nu h^2}{12R^2}\frac{\partial\theta_1}{\partial\alpha} + \frac{1}{Rsin\alpha}\frac{\partial v}{\partial\beta} + \frac{h^2}{12R}\frac{1}{Rsin\alpha}\frac{\partial\theta_2}{\partial\beta}\right] +\right.$$

$$\left. + \frac{ctg\alpha}{R}u + - \frac{h^2}{12R}\frac{ctg\alpha}{R}\theta_1 + \frac{(1+\nu)}{R}w\right\}$$

$$M_{\beta\gamma}\left(\gamma^2\right) = \frac{\mu h^3}{12}\left[\frac{1}{Rsin\alpha}\frac{\partial w}{\partial\beta} - \frac{v}{R} + \theta_2\right]$$

Уравнения состояния (12) представим каноническом виде (векторном):

$$\gamma^{(1)}\frac{\partial U}{R\partial\alpha} = \gamma^{(2)}\frac{\partial U}{R\cdot\sin\alpha\partial\beta} + \gamma^{(3)}U + \gamma^{(4)}Y \tag{13}$$

Здесь матрицы $\gamma^{(1)}, \gamma^{(2)}, \gamma^{(3)}, \gamma^{(4)}$ – квадратичные матрицы пятого порядка

$$\gamma^{(1)}=\begin{pmatrix}\gamma_{11}^{(1)} & 0 & 0 & \gamma_{14}^{(1)} & 0\\ 0 & \gamma_{22}^{(1)} & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \gamma_{33}^{(1)} & 0 & 0\\ \gamma_{41}^{(1)} & 0 & 0 & \gamma_{44}^{(1)} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \gamma_{55}^{(1)}\end{pmatrix};\quad \gamma^{(2)}=\begin{pmatrix}0 & \gamma_{12}^{(2)} & 0 & 0 & \gamma_{15}^{(2)}\\ \gamma_{21}^{(2)} & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \gamma_{42}^{(2)} & 0 & 0 & \gamma_{44}^{(2)}\\ 0 & 0 & 0 & \gamma_{54}^{(2)} & 0\end{pmatrix}$$

$$\gamma^{(3)}=\begin{pmatrix}\gamma_{11}^{(3)} & 0 & \gamma_{13}^{(3)} & \gamma_{14}^{(3)} & 0\\ 0 & \gamma_{22}^{(3)} & 0 & 0 & 0\\ \gamma_{31}^{(3)} & 0 & 0 & \gamma_{34}^{(3)} & 0\\ \gamma_{41}^{(3)} & 0 & \gamma_{43}^{(3)} & \gamma_{44}^{(3)} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \gamma_{55}^{(3)}\end{pmatrix};\quad \gamma^{(4)}=\begin{pmatrix}\gamma_{11}^{(4)} & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \gamma_{22}^{(4)} & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \gamma_{33}^{(4)} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \gamma_{44}^{(4)} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \gamma_{55}^{(4)}\end{pmatrix}$$

Элементы матрицы получаются из уравнения состояния, и имеют вид:

$$\gamma_{11}^{(1)}=\gamma_{22}^{(1)}=\gamma_{33}^{(1)}=\gamma_{44}^{(1)}=\gamma_{55}^{(1)}=1,\gamma_{14}^{(1)}=-\frac{h^2}{12R},\gamma_{41}^{(1)}=-1;$$

$$\gamma_{12}^{(2)}=\gamma_{45}^{(2)}=-\nu;\gamma_{15}^{(2)}=\frac{\nu h^3}{12R};\gamma_{21}^{(2)}=\gamma_{54}^{(2)}=-1;\gamma_{42}^{(2)}=\frac{\nu}{R};$$

$$\gamma_{11}^{(3)}=\gamma_{44}^{(3)}=-\nu\frac{ctg\alpha}{R};\gamma_{13}^{(3)}=-\frac{(1+\nu)}{R};\gamma_{14}^{(3)}=\frac{\nu h^2}{12R}\frac{ctg\alpha}{R};$$

$$\gamma_{22}^{(3)}=\gamma_{55}^{(3)}=\frac{ctg\alpha}{R};\gamma_{31}^{(3)}=\frac{1}{R};\gamma_{34}^{(3)}=-1;\ \gamma_{41}^{(3)}=\nu\frac{ctg\alpha}{R^2};\gamma_{43}^{(3)}=\frac{(1+\nu)}{R^2};$$

$$\gamma_{11}^{(4)}=\frac{1-\nu^2}{Eh},\gamma_{22}^{(4)}=\gamma_{33}^{(4)}=\frac{1}{\mu h},\gamma_{44}^{(4)}=\frac{12(1-\nu^2)}{Eh^3},\gamma_{55}^{(4)}=\frac{12}{\mu h^3}.$$

Аналогичным образом модифицирована каноническая система уравнений для цилиндрических оболочек с учетом деформации сдвига [4].

Теперь рассмотрим условие стыковки сферической оболочки с цилиндрической оболочкой. Граничные условия по координате α для сферической оболочки получаем из вариационного уравнения (9):

$$\left[-N_{\alpha\alpha}+\frac{1}{R}M_{\alpha\alpha}+N_{\alpha\alpha}(\varphi_1)\right]\delta u|_{\alpha}=0;\left[-N_{\alpha\beta}+N_{\beta\beta}(\varphi_2)\right]\delta v|_{\alpha}=0;$$

$$\left[-N_{\gamma\alpha}+\frac{1}{R}M_{\gamma\alpha}+N_{\gamma\gamma}(\varphi_3)\right]\delta w|_{\alpha}=0;\left[-M_{\alpha\alpha}+\frac{1}{R}M_{\alpha\alpha}(\gamma^2)+M_{\alpha\alpha}(\varphi_1)\right]\delta\theta_1|_{\alpha}=0;$$

$$\left[-M_{\alpha\beta}+M_{\alpha\beta}(\varphi_2)\right]\delta\theta_2|_{\alpha}=0;$$

Граничные условия по координате α для цилиндрической оболочки вытекает из вариационного уравнения[4]:

$$\left[-N_{\alpha\alpha}+N_{\alpha\alpha}\left(\varphi_1\right)\right]\delta u\,|_{\alpha}=0;\left[-N_{\alpha\beta}+\frac{1}{R^2}M_{\alpha\beta}\left(\gamma^2\right)+N_{\beta\beta}\left(\varphi_2\right)\right]\delta v\,|_{\alpha}=0;$$
$$\left[-N_{\gamma\alpha}+N_{\gamma\gamma}\left(\varphi_3\right)\right]\delta w\,|_{\alpha}=0;\left[-M_{\alpha\alpha}+M_{\alpha\alpha}\left(\varphi_1\right)\right]\delta\theta_1\,|_{\alpha}=0;$$
$$\left[-M_{\alpha\beta}+\frac{1}{R^2}M_{\alpha\beta}\left(\gamma^2\right)+M_{\alpha\beta}\left(\varphi_2\right)\right]\delta\theta_2\,|_{\alpha}=0;$$

Если касательная к координате α сферической оболочке составляет с координатой α цилиндрической оболочки угол δ, то можно получить следующие контактные условия (в векторной форме):

$$\left[-Y+\beta^{(9)}Y_2+\varPhi\right]^{ц}=\left[-S^{(1)}Y-S^{(2)}Y_2-S^{(3)}Y-S^{(4)}Y_2+S^{(5)}\varPhi\right]^{c},\ \left[U\right]^{ц}=\left[S^{(5)}U\right]^{c}$$

где $S^{(i)}$ — квадратичные матрицы пятого порядка.

Выводы. На основе вариационного принципа Гамильтона – Остроградского с учетом деформации сдвига получены уточненные математические модели в виде системы канонических уравнений для составных оболочечных конструкций, состоящих из цилиндрических и сферических оболочек (типа цистерны, резервуара) для решения краевых задач.

Работа выполняется в рамках гранта **№А14-009** по прикладным исследованиям.

Литература

1. Власов В.З. Общая теория оболочек и ее приложения в технике–М.: Гостехиздат, 1949,761с.
2. Мяченков В.И., Мальцев В.П. Методы и алгоритмы расчета пространственных конструкций на ЭВМ. – М. Машиностроение, 1984, 280 с.
3. Абдусаттаров А., Юлдашев Т. Модели деформирования оболочечных конструкции подкрепленных шпангоутами и стрингерами// Вестник ТашИИТ, 2012, №1, с. 24 – 32.
4. Абдусаттаров А., Юлдашев Т., Расулмухамедов М.М. К построению канонических уравнений движения для цилиндрических оболочек // Матер.Респуб. науч. – тех. конференции «Ресурсосберегающие технологии на железнодорожном транспорте», ТашИИТ, 6-7 декабря,2013.
5. Абдусаттаров А., Юлдашев Т., Расулмухамедов М.М. К постранению канонических уравнений движения сферических оболочек // Вестник ТашИИТ, 2013, №3/4, с. 19 – 26.

Аннотация

Мақолада қобиқлар назарияси ва вариацион усул асосида сферик қобиқ учун ҳаракат тенгламаси силжиш деформациясини эътиборга олган ҳолда умумлаштирилган.