

УДК 539.3

## РАЗРАБОТКА АЛГОРИТМОВ РАСЧЕТА СТЕРЖНЕЙ ПРИ ПРОСТРАНСТВЕННО-ПЕРЕМЕННОМ НАГРУЖЕНИИ С УЧЕТОМ НАКОПЛЕНИЯ ПОВРЕЖДЕНИЙ

Абдусаттаров А., д.т.н., профессор (ТашиИИТ)  
Исомиддинов А.И., ст. науч. сотр.-соискатель (ИСС АНРУз)

В работе приведены расчетные схемы тонкостенных конструкций типа стержней при пространственно-переменном нагружении на основе теории малых упругопластических деформаций [1-3], а также уточненной теории стержней [4].

Уравнения равновесия стержней при пространственно-переменном нагружении запишем в следующем виде:

$$\frac{d}{dx} \left[ (A^{yn} - A^{nl(k)}) \frac{d\vec{V}^{(k)}}{dx} + (B^{yn} - B^{nl(k)}) \vec{V}^{(k)} \right] + (C^{yn} - C^{nl(k)}) \frac{d\vec{V}^{(k)}}{dx} + (D^{yn} - D^{nl(k)}) \vec{V}^{(k)} = \vec{F}^{(k)} \quad (1)$$

Здесь  $\vec{F}^{(k)} = \vec{Q}^{(k)} + \vec{Q}^{nl(k)} + \vec{Q}^{nlo(k)}$ ;

$$\begin{aligned} \vec{Q}^{nl(k)} &= \frac{d}{dx} \left( A^{nl(k)} \frac{d\vec{V}^{0(k-1)}}{dx} + B^{nl(k)} \vec{V}^{0(k-1)} \right) + C^{nl(k)} \frac{d\vec{V}^{0(k-1)}}{dx} + D^{nl(k)} \vec{V}^{0(k-1)} ; \\ \vec{Q}^{nlo(k)} &= \sum_{m=1}^{k-1} \left[ \frac{d}{dx} \left[ A^{nlo(k-m)} \frac{d}{dx} (\vec{V}^{0(k-m)} - \vec{V}^{0(k-m-1)}) + B^{nlo(k-m)} (\vec{V}^{0(k-m)} - \vec{V}^{0(k-m-1)}) \right] + \right. \\ &\quad \left. + C^{nlo(k-m)} \frac{d}{dx} (\vec{V}^{0(k-m)} - \vec{V}^{0(k-m-1)}) + D^{nlo(k-m)} (\vec{V}^{0(k-m)} - \vec{V}^{0(k-m-1)}) \right] ; \end{aligned} \quad (2)$$

В частности, без учета углов сдвига  $\beta_1, \beta_2$  и депланации  $\nu$  вектор, функция  $\vec{V}^{(k)}$  будет иметь следующий вид:  $V^{(k)} = \{u^{(k)}, \alpha_1^{(k)}, \alpha_2^{(k)}, v^{(k)}, w^{(k)}, \theta^{(k)}\}$ ;

где  $A^{yn}, A^{nl(k)}, B^{yn}, B^{nl(k)}, C^{yn}, C^{nl(k)}, D^{yn}$  и  $D^{nl(k)}$  – квадратные матрицы шестого порядка;  
 $\vec{F}^{(k)} = \{f_i^{(k)}\}$ ,  $\vec{Q}^{(k)}$  – векторы шестого порядка.

Направления  $f_0^+$  и  $f_0^-$  в плоскости, параллельной  $XOY$ , составляют угол  $\gamma$ , а проекции  $f_0^+$  и  $f_0^-$  на плоскость, параллельную  $XOY$  с осью  $OY$ , составляют угол  $\alpha$ . Направления  $\bar{f}_0^+$  и  $\bar{f}_0^-$  в плоскости, параллельной  $XOZ$ , составляют угол  $\gamma^*$ , а проекции  $\bar{f}_0^+$  и  $\bar{f}_0^-$  на плоскость, параллельную  $XOZ$  с осью  $OZ$ , составляют  $\alpha^*$ .

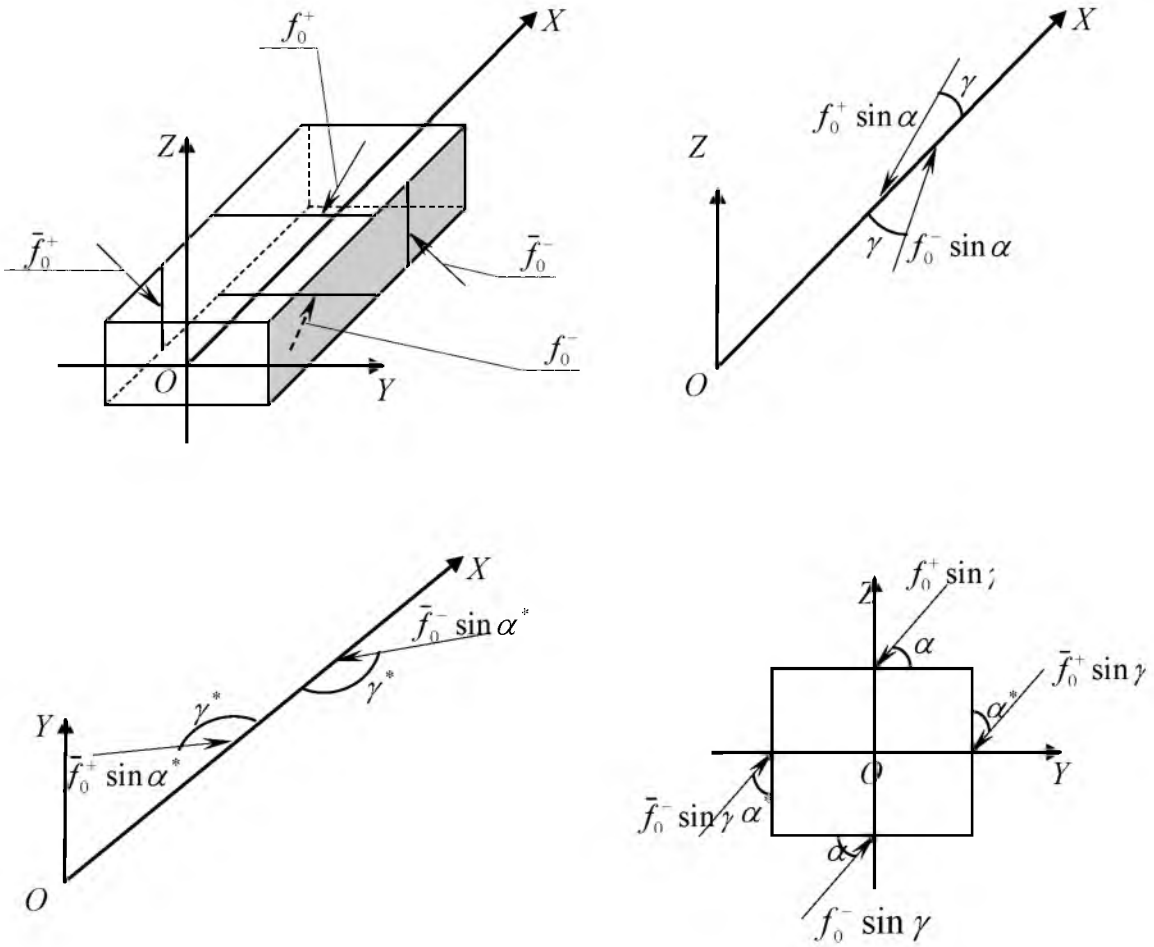


Рис. 1. Закон распределения внешней нагрузки

При этом, компоненты вектора внешних сил получают следующий вид:

$$\begin{aligned}
 f_1^{+(k)} &= (-1)^{k-1} f_0^+ \sin \alpha \cos \gamma, & f_1^{-(k)} &= (-1)^{k-1} f_0^- \sin \alpha \cos \gamma, & \bar{f}_1^{+(k)} &= (-1)^{k-1} \bar{f}_0^+ \sin \alpha^* \cos \gamma^*, \\
 \bar{f}_1^{-(k)} &= (-1)^{k-1} \bar{f}_0^- \sin \alpha^* \cos \gamma^*, & f_2^{+(k)} &= (-1)^{k-1} f_0^+ \sin \gamma \cos \alpha, & f_2^{-(k)} &= (-1)^{k-1} f_0^- \sin \gamma \cos \alpha, \\
 \bar{f}_2^{+(k)} &= (-1)^{k-1} \bar{f}_0^+ \sin \gamma^* \sin \alpha^*, & \bar{f}_2^{-(k)} &= (-1)^{k-1} \bar{f}_0^- \sin \gamma^* \sin \alpha^*, & f_3^{+(k)} &= (-1)^{k-1} f_0^+ \sin \alpha \sin \gamma, \\
 f_3^{-(k)} &= (-1)^{k-1} f_0^- \sin \alpha \sin \gamma, & \bar{f}_3^{+(k)} &= (-1)^{k-1} \bar{f}_0^+ \sin \gamma^* \cos \alpha^*, & \bar{f}_3^{-(k)} &= (-1)^{k-1} \bar{f}_0^- \sin \gamma^* \cos \alpha^*.
 \end{aligned}$$

Компоненты вектора  $\bar{F}^{(k)}$  в дифференциальном уравнении (1) формируются так:

$$\left. \begin{aligned} F_1^{(k)} &= \frac{l^4}{3Gh_0J_0} \left[ b_0 (f_3^{+(k)} + f_3^{-(k)}) + h_0 (\bar{f}_3^{+(k)} + \bar{f}_3^{-(k)}) \right], \\ F_2^{(k)} &= \frac{l^3}{3Gh_0J_0} \left[ \frac{b_0 h_0}{2} (f_1^{+(k)} - f_1^{-(k)}) \right], \\ F_3^{(k)} &= \frac{l^4}{3Gh_0J_0} \left[ b_0 (f_2^{+(k)} + f_2^{-(k)}) + h_0 (\bar{f}_2^{+(k)} + \bar{f}_2^{-(k)}) \right], \\ F_4^{(k)} &= \frac{l^3}{3Gh_0J_0} \left[ \frac{b_0 h_0}{2} (\bar{f}_1^{+(k)} - \bar{f}_1^{-(k)}) \right], \\ F_5^{(k)} &= \frac{l^3}{3Gh_0J_0} \left[ h_0 (f_1^{+(k)} + f_1^{-(k)}) + b_0 (\bar{f}_1^{+(k)} - \bar{f}_1^{-(k)}) \right], \\ F_6^{(k)} &= \frac{l^3}{3Gh_0J_0} \left[ \frac{b_0 h_0}{2} (f_2^{+(k)} - f_2^{-(k)}) - \frac{b_0 h_0}{2} (\bar{f}_3^{+(k)} - \bar{f}_3^{-(k)}) \right]. \end{aligned} \right\}$$

Векторное уравнение(1) после аппроксимации ЦРС получает вид:

$$\left( A_i^{yn} - A_i^{na(k)} \right) \vec{V}_{i+1}^{(k)} - \left( B_i^{yn} - B_i^{na(k)} \right) \vec{V}_i^{(k)} + \left( C_i^{yn} - C_i^{na(k)} \right) \vec{V}_{i-1}^{(k)} = \vec{Q}_i^{(k)} + \vec{Q}_i^{na} + \vec{Q}_i^{nao};$$

$$i = 1, 2, \dots, n-1; \tag{3}$$

Где

$$\begin{aligned} A_i^{yn} - A_i^{na(k)} &= \frac{1}{h^2} (A_{i+1/2}^{yn} - A_{i+1/2}^{na(k)}) + \frac{1}{2h} (B_{i+1}^{yn} - B_{i+1}^{na(k)}) + \frac{1}{2h} (C_i^{yn} - C_i^{na(k)}); \\ B_i^{yn} - B_i^{na(k)} &= \frac{1}{h^2} \left[ (A_{i+1/2}^{yn} - A_{i+1/2}^{na(k)}) - (A_{i-1/2}^{yn} - A_{i-1/2}^{na(k)}) \right] + (D_i^{yn} - D_i^{na(k)}); \\ C_i^{yn} - C_i^{na(k)} &= \frac{1}{h^2} (A_{i-1/2}^{yn} - A_{i-1/2}^{na(k)}) - \frac{1}{2h} \left[ (B_{i-1}^{yn} - B_{i-1}^{na(k)}) + (C_i^{yn} - C_i^{na(k)}) \right]; \\ \vec{Q}_i^{na} &= \frac{1}{h} \left[ A_{i+1/2}^{yn} \frac{\vec{V}_{i+1}^{o(k-1)} - \vec{V}_i^{o(k-1)}}{h} - A_{i-1/2}^{na(k)} \frac{\vec{V}_i^{o(k-1)} - \vec{V}_{i-1}^{o(k-1)}}{h} \right] + \\ &+ \frac{B_{i+1}^{na(k)} \vec{V}_{i+1}^{o(k-1)} - B_{i-1}^{na(k)} \vec{V}_{i-1}^{o(k-1)}}{2h} + C_i^{na(k)} \frac{\vec{V}_{i+1}^{o(k-1)} - \vec{V}_{i-1}^{o(k-1)}}{2h} + D_i^{na(k)} \vec{V}_i^{o(k-1)}; \\ \vec{Q}_i^{nao} &= \sum_{m=1}^{k-1} \left\{ \frac{1}{h} \left[ A_{i+1/2}^{nao} \frac{\vec{V}_{i+1}^{o(k-m)} - \vec{V}_{i+1}^{o(k-m-1)} - (\vec{V}_i^{(k-m)} - \vec{V}_i^{o(k-m-1)})}{2h} - \right. \right. \\ &\left. \left. - A_{i-1/2}^{nao(k-m)} \frac{\vec{V}_i^{nao(k-m)} - \vec{V}_i^{nao(k-m-1)} - (\vec{V}_{i-1}^{nao(k-m)} + \vec{V}_{i-1}^{nao(k-m-1)})}{2h} \right] - \right. \end{aligned} \tag{4}$$

$$\left. \begin{aligned} & -\frac{B_{i+1}^{nlo(k-m)} \left( \vec{V}_{i+1}^{nlo(k-m)} - \vec{V}_{i+1}^{nlo(k-m-1)} \right) - B_{i-1}^{nlo(k-m)} \left( \vec{V}_{i-1}^{nlo(k-m)} - \vec{V}_{i-1}^{nlo(k-m-1)} \right)}{2h} + \\ & + C_i^{nlo(k-m)} \frac{\vec{V}_{i+1}^{o(k-m)} - \vec{V}_{i+1}^{o(k-m-1)} - \left( \vec{V}_{i-1}^{o(k-m)} - \vec{V}_{i-1}^{o(k-m-1)} \right)}{2h} + D_i^{nlo(k-m)} \left( \vec{V}_i^{o(k-m)} - \vec{V}_i^{o(k-m-1)} \right) \end{aligned} \right\}$$

Граничные условия можно переписать в таком виде:

$$\left[ \left( A^{yn} - A^{nl(k)} \right) \frac{d\vec{V}^{(k)}}{dx} + \left( B^{yn} - B^{nl(k)} \right) \vec{V}^{(k)} \right] \Big|_{\Gamma} = \vec{F}^{(k)} \quad (5)$$

где  $\vec{F}^{(k)} = \vec{Q}^{(k)} + \vec{Q}^{nl(k)} + \vec{Q}^{nlo(k)}$

Здесь введено обозначение

$$\vec{Q}^{nl(k)} = A^{nl(k)} \frac{d\vec{V}^{o(k-1)}}{dx} + B^{nl(k)} \vec{V}^{o(k-1)}, \quad (6)$$

$$\vec{Q}^{nlo(k)} = \sum_{m=1}^{k-1} \left[ A^{nlo(k-m)} \frac{d}{dx} \left( \vec{V}^{o(k-m)} - \vec{V}^{o(k-m-1)} \right) + B^{nlo(k-m)} \left( \vec{V}^{o(k-m)} - \vec{V}^{o(k-m-1)} \right) \right] \quad (7)$$

Граничные условия(5) в точках  $x = 0$  и  $x = l$  можно записать:

$$\begin{aligned} & K_0 \left( A_0^{yn} - A_0^{nl(k)} \right) \frac{d\vec{V}^{(k)}}{dx} + T_0 \left( B_0^{yn} - B_0^{nl(k)} \right) \vec{V}^{(k)} = \vec{F}_0^{(k)}, \quad \text{при } x = 0, \\ & -K_N \left( A_N^{yn} - A_N^{nl(k)} \right) \frac{d\vec{V}^{(k)}}{dx} + T_N \left( B_N^{yn} - B_N^{nl(k)} \right) \vec{V}^{(k)} = \vec{F}_N^{(k)}, \quad \text{при } x = N, \end{aligned} \quad (8)$$

здесь  $K_0, K_N, T_0$  и  $T_N$  - формирующие коэффициенты граничных условий.

Аппроксимация граничных условий (8) по левой и правой конечно разностной схеме имеет вид:

$$\left. \begin{aligned} \vec{V}_0^{(k)} &= \left( T_0 \left( B_0^{yn} - B_0^{nl(k)} \right) - \frac{3}{2h} K_0 \left( A_0^{yn} - A_0^{nl(k)} \right) \right)^{-1} \vec{F}_0^{(k)} - \\ & - \frac{4}{2h} K_0 \left( A_0^{yn} - A_0^{nl(k)} \right) \vec{V}_1^{(k)} + \frac{1}{2h} K_0 \left( A_0^{yn} - A_0^{nl(k)} \right) \vec{V}_2^{(k)}, \\ \vec{V}_N^{(k)} &= \left( T_N \left( B_N^{yn} - B_N^{nl(k)} \right) - \frac{3}{2h} K_N \left( A_N^{yn} - A_N^{nl(k)} \right) \right)^{-1} \vec{F}_N^{(k)} - \\ & - \frac{4}{2h} K_N \left( A_N^{yn} - A_N^{nl(k)} \right) \vec{V}_{N-1}^{(k)} + \frac{1}{2h} K_N \left( A_N^{yn} - A_N^{nl(k)} \right) \vec{V}_{N-2}^{(k)} \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Для решения сформулированных алгебраических уравнений (3) с соответствующими граничными условиями (9), используется метод прогонки, с помощью следующей рекуррентной формулы:

$$\vec{V}_i = \alpha_i \vec{V}_{i+1} + \beta_i;$$

$$i = N - 1, \dots, 1$$
(10)

Здесь

$$\alpha_i = (\bar{B}_i - \bar{C}_i \alpha_{i-1})^{-1} \bar{A}_i;$$

$$\beta_i = (\bar{B}_i - \bar{C}_i \alpha_{i-1})^{-1} (\bar{C}_i \beta_{i-1} - \bar{F}_i)$$

при  $i = 1, 2, \dots, N - 1$ .

(11)

В модификации А.А.Самарского-И.В.Фрязинова векторное уравнение (1) аппроксимируется в разностной схеме в виде разделенной на две группы (рис. 2).

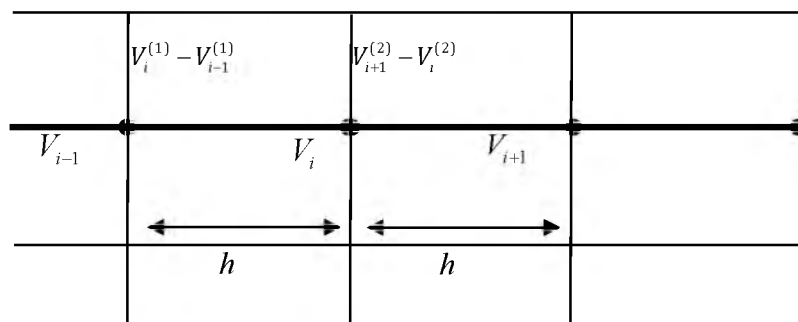


Рис. 2. Схема аппроксимации по МСФ

Введя равномерную сетку  $\omega_h = \{x_i = ih\}$  ( $i = 1, 2, \dots, n - 1$ ) в области  $G$ , аппроксимируем дифференциальное уравнение (1) следующими разностными схемами с порядком  $O(h^2)$  [5]:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{h} \left( A_{i+\frac{1}{2}} \frac{\vec{V}_{i+1}^{(1)} - \vec{V}_i^{(1)}}{h} - A_{i-\frac{1}{2}} \frac{\vec{V}_i^{(1)} - \vec{V}_{i-1}^{(1)}}{h} \right) + \frac{B_i \vec{V}_{i+1}^{(2)} - B_i \vec{V}_i^{(2)}}{h} + \frac{C_i \vec{V}_{i+1}^{(2)} - C_i \vec{V}_i^{(2)}}{h} + D_i \vec{V}_i^{(1)} &= \vec{F}_i, \\ \frac{1}{h} \left( A_{i+\frac{1}{2}} \frac{\vec{V}_{i+1}^{(2)} - \vec{V}_i^{(2)}}{h} - A_{i-\frac{1}{2}} \frac{\vec{V}_i^{(2)} - \vec{V}_{i-1}^{(2)}}{h} \right) + \frac{B_i \vec{V}_i^{(1)} - B_i \vec{V}_{i-1}^{(1)}}{h} + \frac{C_i \vec{V}_i^{(1)} - C_i \vec{V}_{i-1}^{(1)}}{h} + D_i \vec{V}_i^{(2)} &= \vec{F}_i. \end{aligned} \right\}$$
(12)

Введя вектор  $\vec{U}_i = \begin{bmatrix} \vec{V}_i^{(1)} \\ \vec{V}_i^{(2)} \end{bmatrix}$ , систему уравнений (12) можно записать в виде:

$$\bar{A}_i \vec{U}_{i+1} - \bar{B}_i \vec{U}_i + \bar{C}_i \vec{U}_{i-1} = \bar{F}_i;$$

$$i = 1, 2, \dots, N - 1;$$
(13)

$$\bar{U}_0 = 0, \quad \bar{U}_N = 0. \quad (14)$$

здесь

$\hat{A}_i, \hat{B}_i, \hat{C}_i$  – клеточные матрицы;

$\hat{F}_i$  – клеточный вектор представляющий в виде:

$$\hat{A}_i = \begin{bmatrix} \frac{1}{h} A_{i+\frac{1}{2}} & B_i + C_i \\ \theta & \frac{1}{h} A_{i+\frac{1}{2}} \end{bmatrix}; \quad \hat{B}_i = \begin{bmatrix} \frac{1}{h} A_{i+\frac{1}{2}} + \frac{1}{h} A_{i-\frac{1}{2}} - hD_i & B_i + C_i \\ -B_i - C_i & \frac{1}{h} A_{i+\frac{1}{2}} + \frac{1}{h} A_{i-\frac{1}{2}} - hD_i \end{bmatrix}; \quad \hat{C}_i = \begin{bmatrix} \frac{1}{h} A_{i-\frac{1}{2}} & \theta \\ -B_i - C_i & \frac{1}{h} A_{i-\frac{1}{2}} \end{bmatrix}; \quad \hat{F}_i = \begin{bmatrix} h\bar{F}_i \\ h\bar{F}_i \end{bmatrix}.$$

Для решения сформулированных задач Коши (13) - (14) используется метод матричной прогонки в котором на прямом ходе вычисляются прогоночные коэффициенты, а на обратном – находят решения системы линейных алгебраических уравнений (13).

Решение будем искать в виде

$$\bar{U}_i = \hat{\alpha}_i \bar{U}_{i+1} + \hat{\beta}_i \\ i = N - 1, \dots, 1; \quad (15)$$

где  $\hat{\alpha}_i$  и  $\hat{\beta}_i$  – пока не определенные клеточные матрицы и вектора. Для вычисления этих параметров можно получить следующие рекуррентные формулы:

$$\hat{\alpha}_i = (\hat{B}_i - \hat{C}_i \hat{\alpha}_{i-1})^{-1} \hat{A}_i; \\ \hat{\beta}_i = (\hat{B}_i - \hat{C}_i \hat{\alpha}_{i-1})^{-1} (\hat{C}_i \hat{\beta}_{i-1} - \hat{F}_i) \\ \text{при } i = 1, 2, \dots, N - 1. \quad (16)$$

Для реализации выше приведенного алгоритма составлена модифицированная комплексная программа на объектно-ориентированном языке Delphi. (рис.3).

Построен простой и удобный интерфейс пользователя, позволяющий работать с программным обеспечением.

Комплекс программ работает в диалоговом режиме. В результате диалога задаются следующие параметры, которые обозначают геометрические и механические характеристики стержня:

$l$  - длина стержня;

$h_0$  - высота (толщина) стержня;

$b_0$  - ширина стержня;

$E$  - модуль упругости;

$f_0^+, f_0^-, \bar{f}_0^+, \bar{f}_0^-$  - значения пространственных нагрузок действующие на стержень;

$N$  - число узлов;

$kk$  - число ограничения нагружении.

Созданный интерфейс предполагает вывод результатов расчета, в виде таблиц и графиков, так и запись их в индивидуальные файлы, для дальнейшего их рассмотрения и анализа.

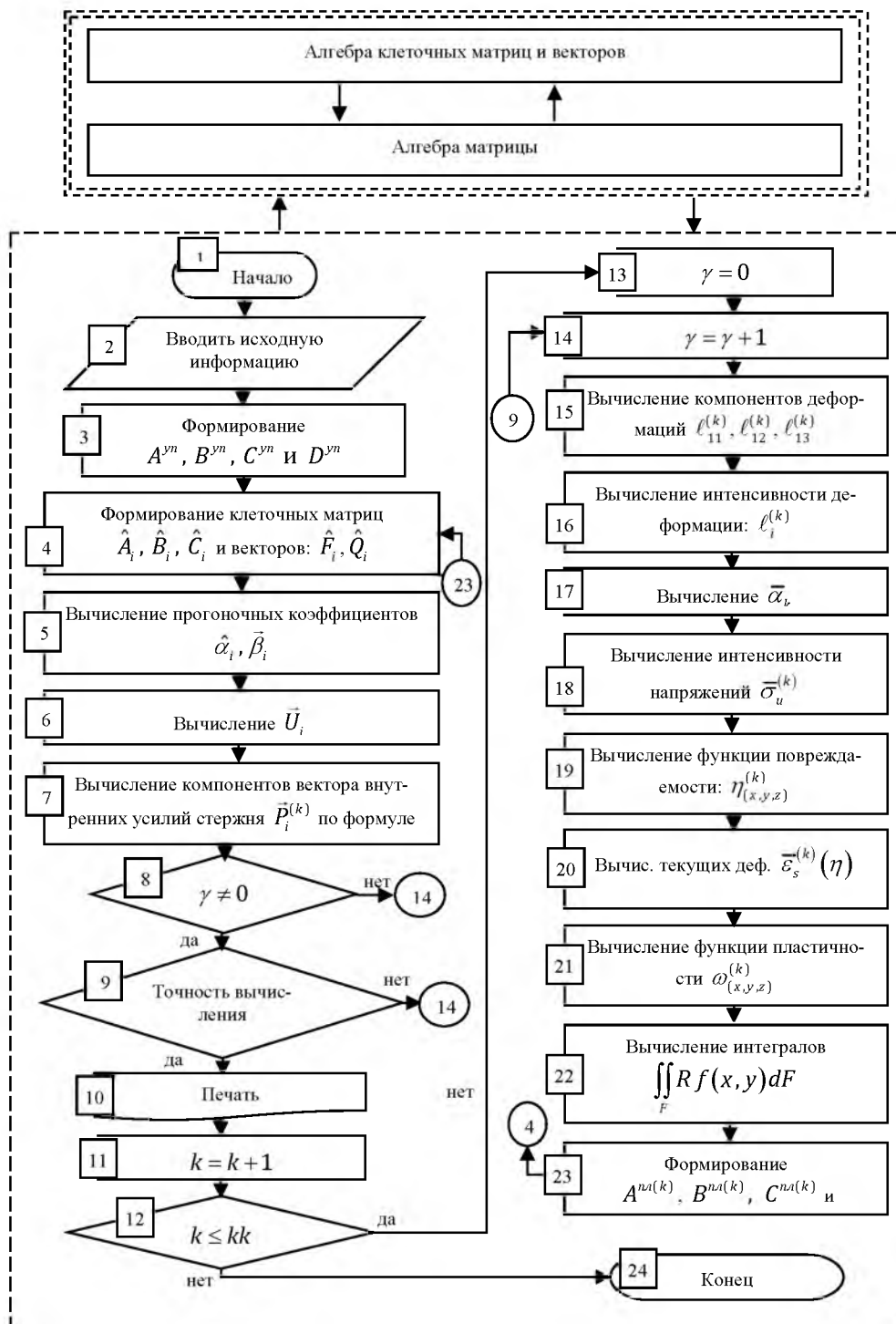


Рис. 3. Вычислительная схема программного обеспечения

В качестве примера произведен расчет тонкостенных стержней прямоугольного поперечного сечения, защемленного по торцам при повторно-переменном нагружении. Для определения истинных значений расчетных величин воспользовались теоремой о переменном нагружении. Условием появления вторичных, третичных и т.д. пластических областей является  $\bar{\sigma}_u^{(k)} \geq \alpha_k \sigma_s$ , где  $\alpha_k$  - масштабный коэффициент [6].

Отметим, что значения расчетных величин, полученные с применением теоремы о переменном нагружении [2] и на основе соотношений, связывающих компоненты напряжений и деформаций в текущих координатах [3] при использовании обобщенного принципа Мазинга, совпадают.

#### *Литература*

1. Ильюшин А.А. Пластичность. -М: Гостехиздат, 1948. -376 с.
2. Москвитин В.В. Пластичность при переменных нагружениях. Изд-во МГУ, 1965, 262 с.
3. Буриев Т. Алгоритмизация расчета несущих элементов тонкостенных конструкций. Т.: Изд. «Фан», 1986, - 244с.
4. Кабулов В.К. Алгоритмизация в теории упругости и деформационной теории пластичности. – Т.: Фан, 1966. -394 с.
5. Самарский А.А., Михайлов А.П. Математическое моделирование. – Идеи. Методы. Примеры. М.: Физматлит, 2002. – 300 с.
6. Абдусаттаров А., Юлдашев Т., Исомиддинов А.И. К расчету тонкостенных стержней при пространственно-переменном нагружении с учетом свойств упрочнения-разупрочнения. // Узб, журнал «Проблемы механики», 2014, №2, с. 9-12.